02 1992

1 5 0

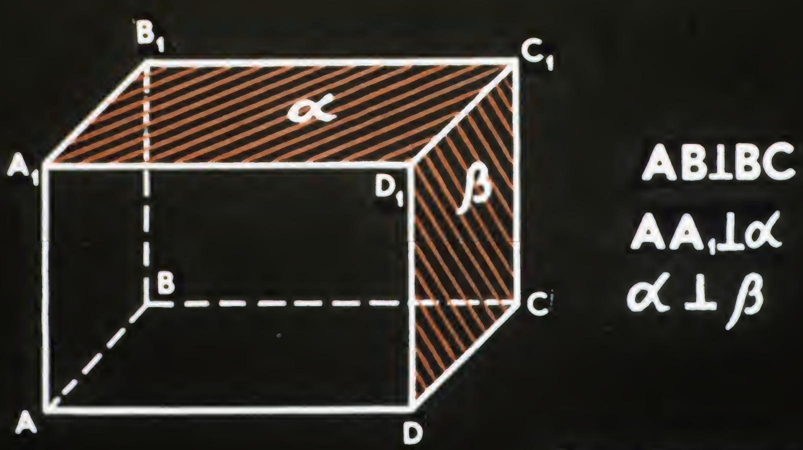
ТУ–19–241–82

8

3.


студия
ДИАФИЛЬМ

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ



$AB \perp BC$

$AA_1 \perp \alpha$

$\alpha \perp \beta$

Математика, X кл.

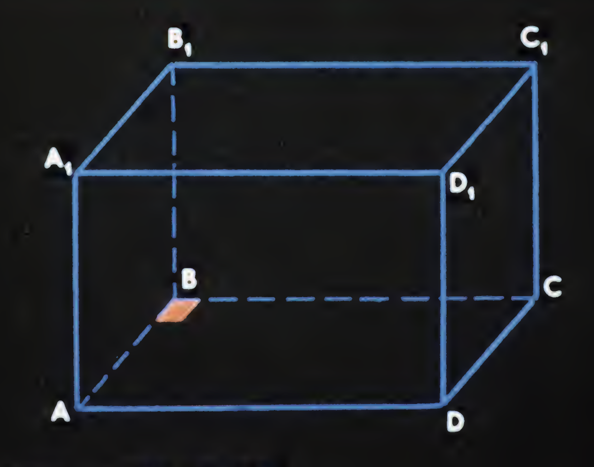
К сведению учителя

Кадры 3-20 предназначены для работы по учебнику «Геометрия» А. В. Погорелова, остальные—по учебнику «Геометрия» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка.

Стрелки в кадрах напоминают, что здесь учащимся надо перечислить известные им следствия из условия или те утверждения, из которых следует истинность заключения.

Многоточие в кадрах означает требование закончить доказательство предлагаемой теоремы.

Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.



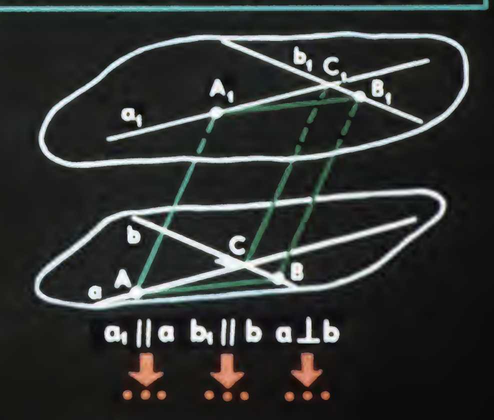
AB⊥BC, так как ∠ABC=90°.

Какие еще ребра прямоугольного параллелепипеда перпендикулярны?

Теорема.

Если прямые a_1 и b_1 пересекаются и соответственно параллельны перпендикулярным прямым a и b, то a_1 и b_1 — перпендикулярны.

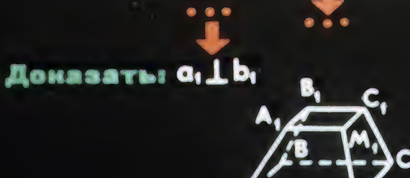




Дано: a_1 и b_1 — пересекаются

$a_1 \parallel a$ $\quad b_1 \parallel b$ $\quad a \perp b$

Доказать: $a_1 \perp b_1$



ABCM — квадрат.
$A_1M_1 \parallel AM$; $A_1B_1 \parallel AB$.
Докажите, что из теоремы следует: $\angle B_1A_1M_1 = 90°$.

Доказательство теоремы.

Дано: a_1 и b_1 — пересекаются $a_1 \parallel a$ $b_1 \parallel b$ $a \perp b$

a_1 и b_1 — в плоскости α_1

a и b — в плоскости α_2

$\alpha_1 \parallel \alpha_2$

a_1 и a — в плоскости β_1

b_1 и b_2 — в плоскости β_2

Проведем в β_1 — $AA_1 \parallel CC_1$; в β_2 — $B_1B \parallel C_1C$

$AA_1 \parallel BB_1$

AA_1 и BB_1 в плоскости γ

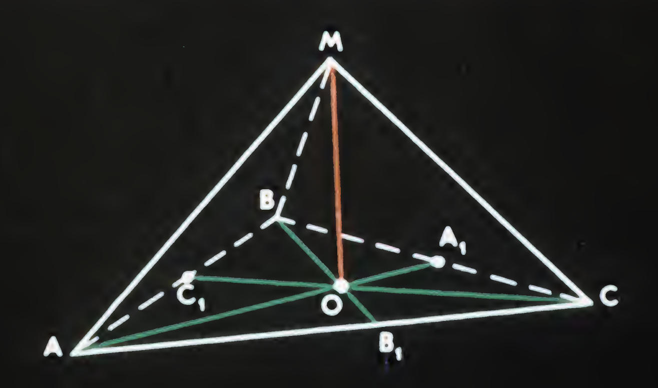
$AB \parallel A_1B_1$

. . .

$\angle A_1C_1B_1 = 90°$

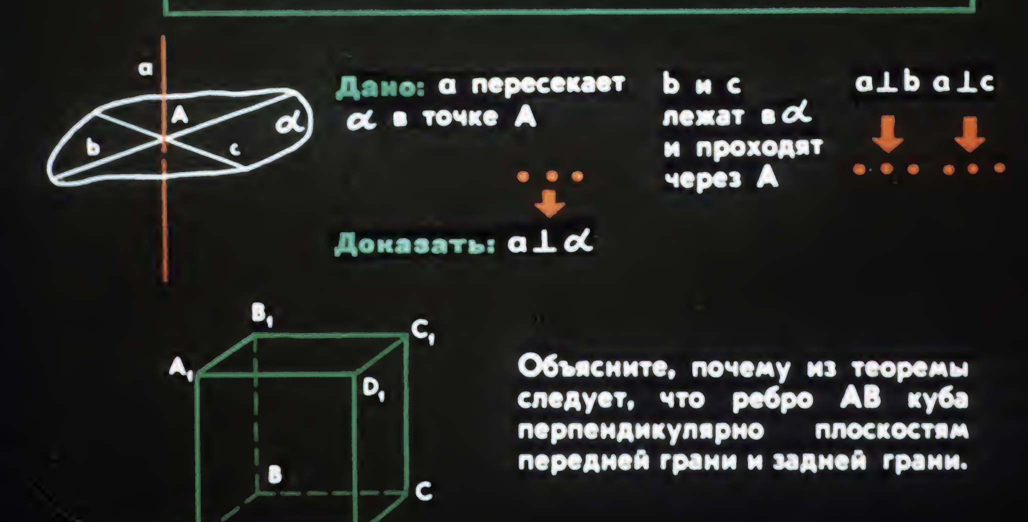
Доказать: $a_1 \perp b_1$

Прямая a называется **перпендикулярной плоскости** α, если a перпендикулярна любой прямой x в α, проходящей через точку пересечения a и α.



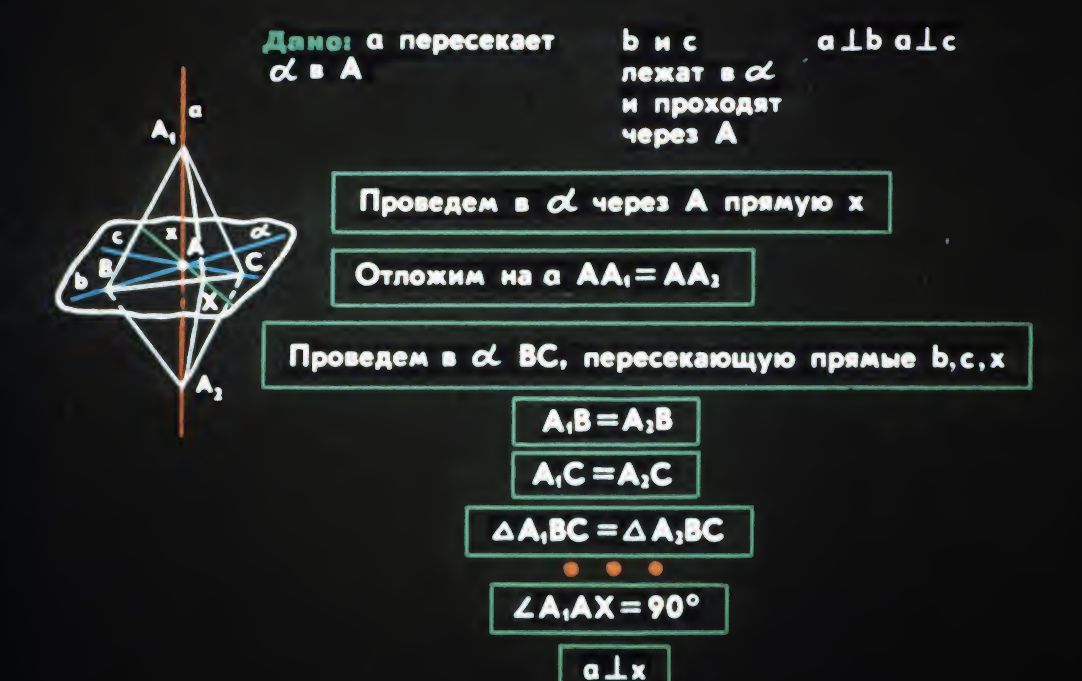
α — плоскость треугольника ABC; MO пересекает α в точке O; $MO \perp \alpha$. Назовите перпендикулярные прямые.

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Если прямая a пересекает плоскость α в точке A и перпендикулярна двум прямым в α, проходящим через точку A, то a перпендикулярна α.



Объясните, почему из теоремы следует, что ребро AB куба перпендикулярно плоскостям передней грани и задней грани.

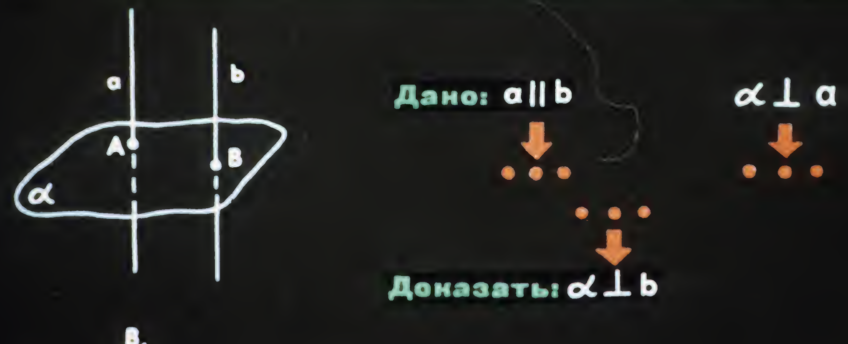
Доказательство теоремы.

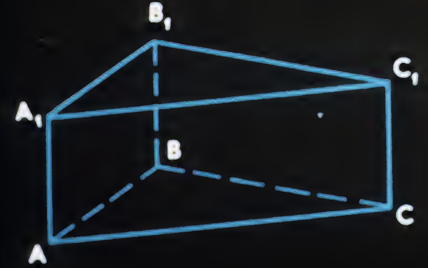


Доказать: a ⊥ α

Теорема.

Если прямые a и b параллельны и плоскость α перпендикулярна прямой a, то α перпендикулярна прямой b.

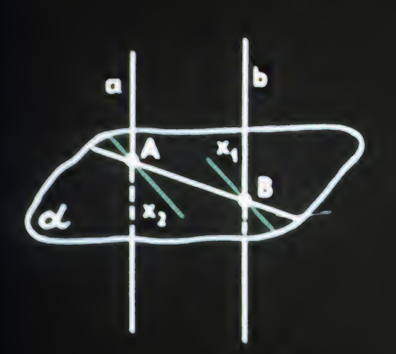




Известно, что $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. α — плоскость треугольника ABC. $\alpha \perp AA_1$. Докажите, что из теоремы следует: $BB_1 \perp BC$ и $CC_1 \perp BC$.

Доказательство теоремы.

Дано: $a \parallel b$ $\alpha \perp a$



Проведем в α через точку пересечения b и α произвольную прямую x_1.

Проведем в α через точку пересечения a и α прямую $x_2 \parallel x_1$.

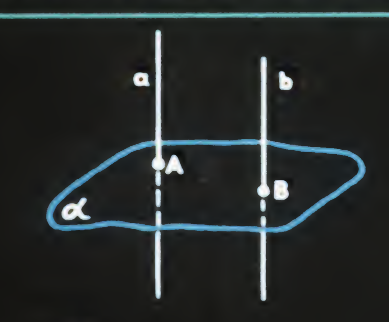
• • •

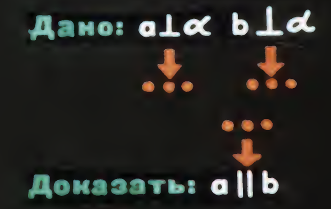
$b \perp x_1$

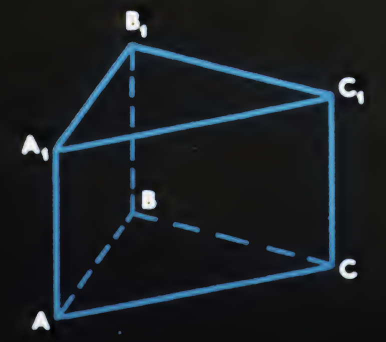
Доказать: $\alpha \perp b$

Теорема.

Если две прямые перпендикулярны плоскости α, то они параллельны.

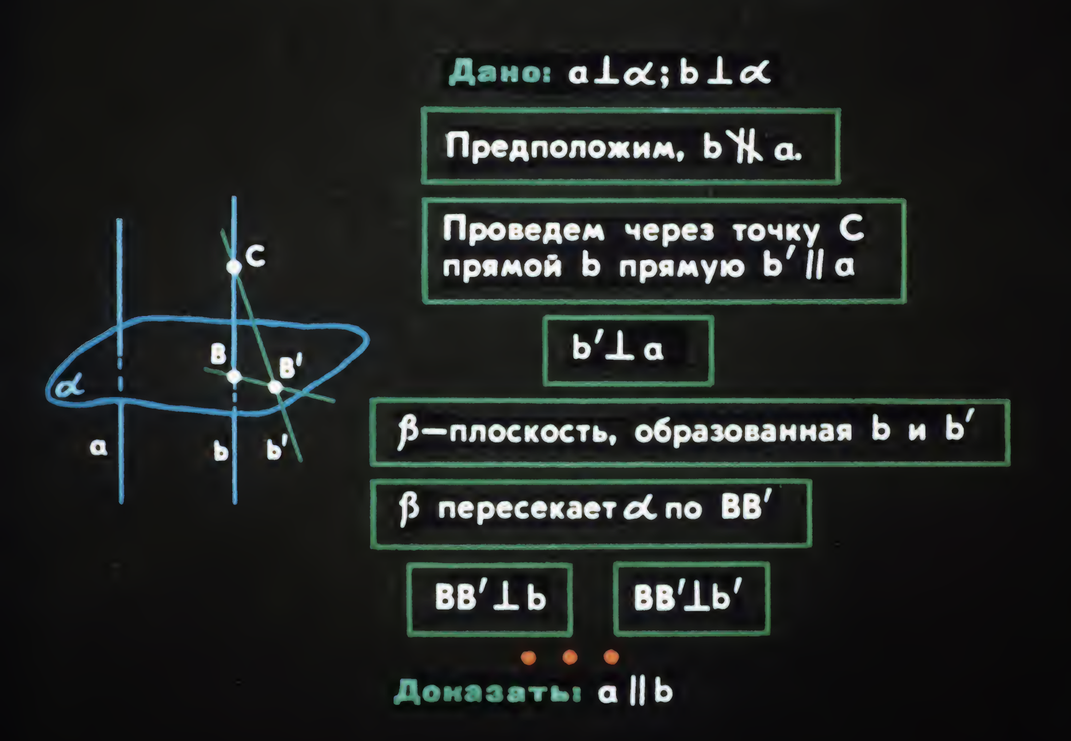


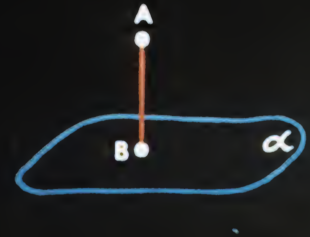


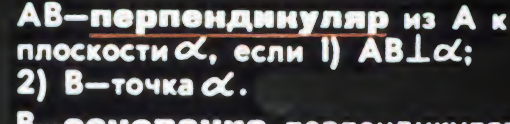


Докажите, используя теорему, что если $AA_1 \perp AB$; $AA_1 \perp AC$; $CC_1 \perp BC$; $CC_1 \perp AC$, то $AA_1 \parallel CC_1$.

Доказательство теоремы.



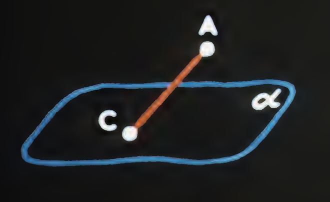




AB—**перпендикуляр** из A к плоскости α, если 1) $AB \perp \alpha$; 2) B—точка α.

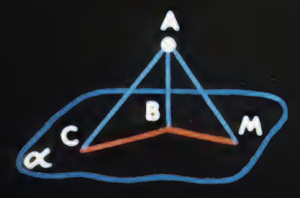
B—**основание** перпендикуляра.

Длина AB—**расстояние** от A до α.



AC—**наклонная** из A к плоскости α, если 1) AC не перпендикуляр к α; 2) C—точка α.

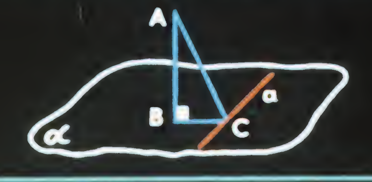
C—**основание** наклонной.



AB—перпендикуляр из A к α;
AC и AM—наклонные.
BC—**проекция** наклонной AC на плоскость α.

Назовите проекцию AM на α.

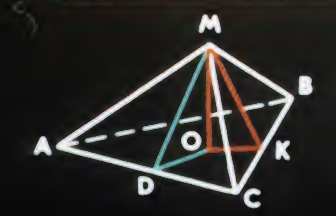
Теорема о трех перпендикулярах.



Рассмотрим перпендикуляр AB и наклонную AC к плоскости α, прямую a, лежащую в α и проходящую через основание наклонной.

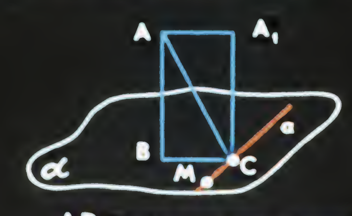
1. Если a перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной.

2. Если a перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна проекции наклонной.



MO — перпендикуляр к плоскости α треугольника ABC; OD⊥AC; MK⊥BC. Сформулируйте ту часть теоремы, из которой следует, что 1) OK⊥BC; 2) MD⊥AC.

Доказательство теоремы о трех перпендикулярах.



AB—перпендикуляр к α;
AC—наклонная к α;
CM—прямая в α.

Доказаем вначале:
если $MC \perp BC$, то $MC \perp AC$.

Проведем $CA_1 \perp \alpha$

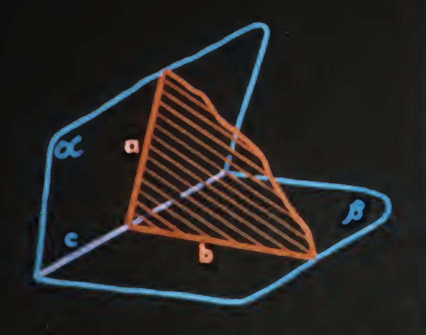
$CA_1 \parallel AB$

CA_1 и AB в плоскости β

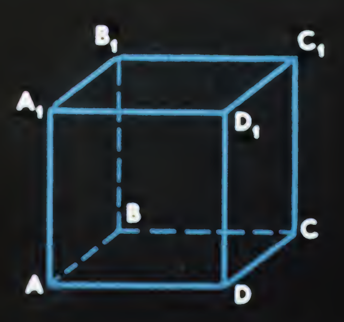
• • •

$MC \perp AC$

Докажите, используя тот же чертеж, обратную теорему: если $MC \perp AC$, то $MC \perp BC$.



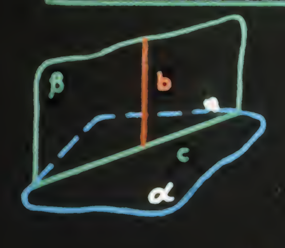
Рассмотрим плоскости α и β и плоскость γ, перпендикулярную линии их пересечения. Если γ пересекает α и β по перпендикулярным прямым, то α и β называются **перпендикулярными.**



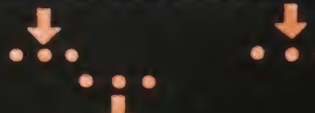
Докажите, что плоскости граней куба ABB_1A_1 и $ABCD$ — перпендикулярны.

Теорема.

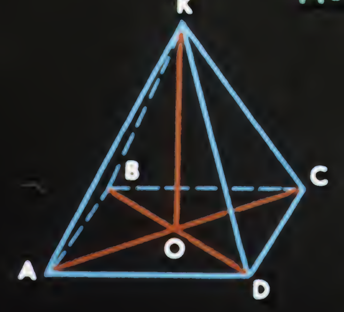
Если плоскость β проходит через прямую b, перпендикулярную к плоскости α, то β перпендикулярна α.



Дано: $b \perp \alpha$; β проходит через b



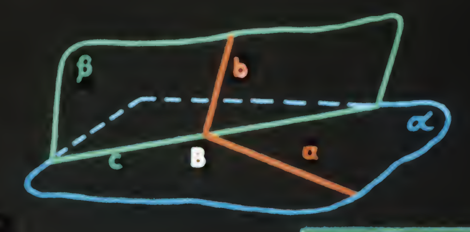
Доказать: $\alpha \perp \beta$



$KO \perp AC$; $KO \perp BD$.

Докажите, что из теоремы следует перпендикулярность плоскостей четырехугольника ABCD и треугольника AKC.

Доказательство теоремы.



Дано: $b \perp \alpha$

b перпендикулярна любой прямой в α

β проходит через b.
α и β пересекаются по прямой c

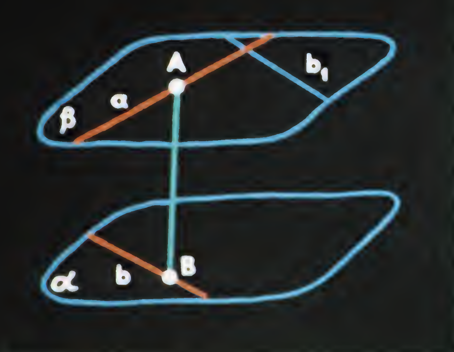
$b \perp c$

Проведем в α через точку пересечения b и α прямую $a \perp c$

Через a и b проходит плоскость γ

• • •

Доказать: $\alpha \perp \beta$

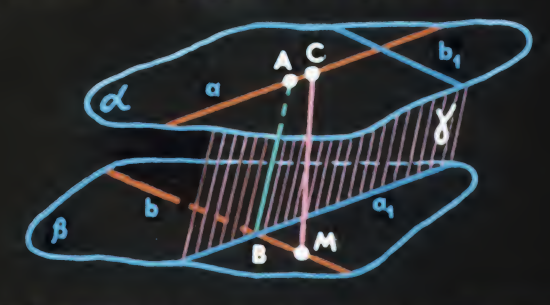


Отрезок AB называется **общим перпендикуляром скрещивающихся прямых** a и b, если A и B—на этих прямых, AB—перпендикуляр к каждой из них.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Объясните, почему расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

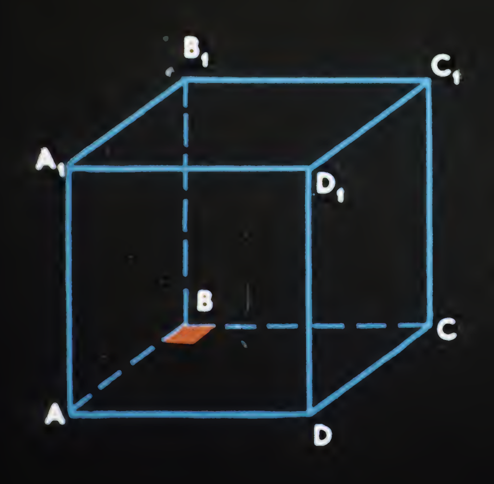
Докажем, что единственный общий перпендикуляр скрещивающихся прямых является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.



Через a и b проведем параллельные плоскости α и β. Прямые, проходящие через a и перпендикулярные β, образуют плоскость γ.

Завершите доказательство существования общего перпендикуляра скрещивающихся прямых.
Почему прямая CM не может быть общим перпендикуляром a и b?

Две прямые называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°.



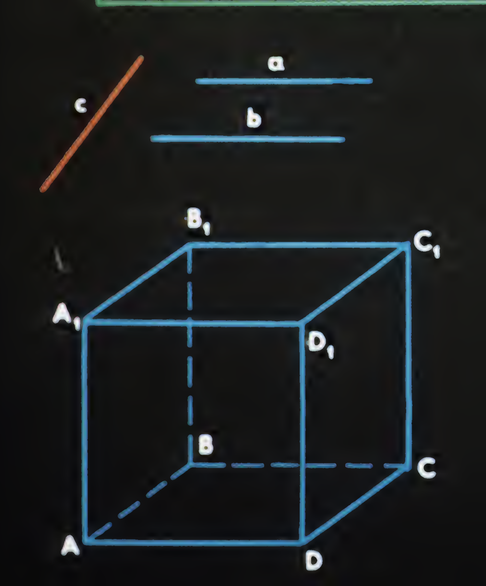
Ребра AB и BC куба перпендикулярны, так как $\angle ABC = 90°$.

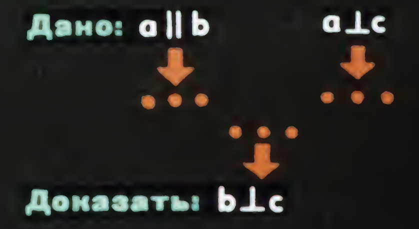
Объясните, почему

$AB \perp B_1C_1$.

Лемма.

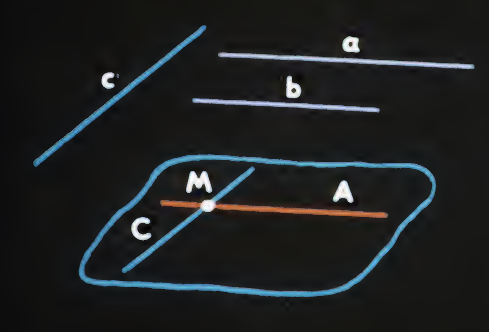
Если две прямые параллельны и одна из них перпендикулярна третьей прямой, то и вторая перпендикулярна третьей прямой.





Докажите, что из леммы следует перпендикулярность ребер куба AB и CC_1.

Доказательство леммы.



Дано: $a \parallel b; a \perp c$

Через произвольную точку M проведем $MA \parallel a$, $MC \parallel c$.

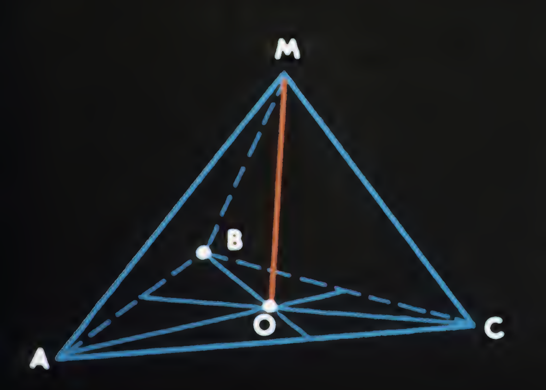
$\angle AMC = 90^\circ$

$MA \parallel b$



Доказать: $b \perp c$

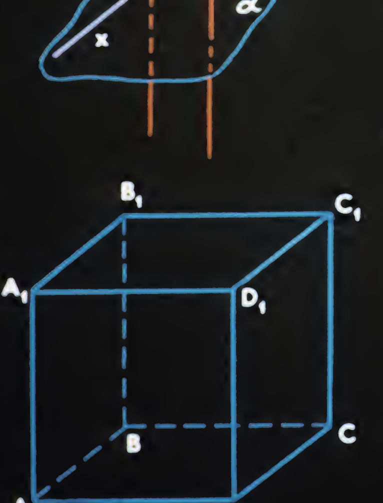
Прямая a называется перпендикулярной плоскости α, если a перпендикулярна любой прямой x, лежащей в α.

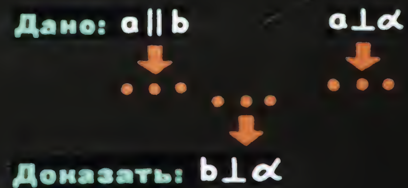


α — плоскость треугольника ABC; $MO \perp \alpha$; $O \in \alpha$. Назовите перпендикулярные прямые.

Теорема.

Если две прямые параллельны и одна из них перпендикулярна плоскости α, то и вторая перпендикулярна плоскости α.

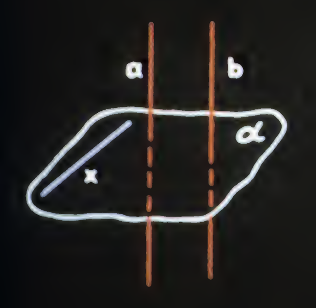




α — плоскость нижнего основания куба; $AA_1 \perp \alpha$. Докажите, что из рассмотренной теоремы следует: $BB_1 \perp \alpha$; $CC_1 \perp \alpha$; $DD_1 \perp \alpha$.

Доказательство теоремы.

Дано: $a \parallel b$ $\quad a \perp \alpha$



Проведем в α произвольную прямую x

$a \perp x$

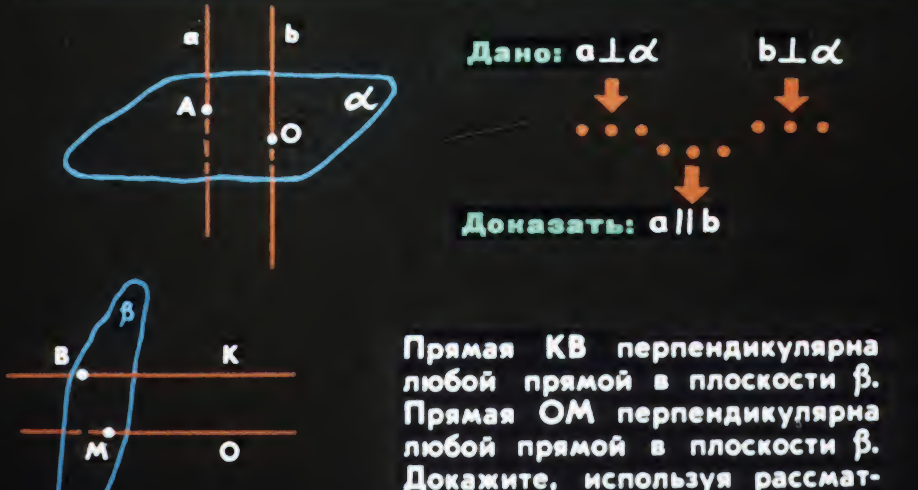
b — перпендикулярна любой прямой в α

• • •

Доказать: $b \perp \alpha$

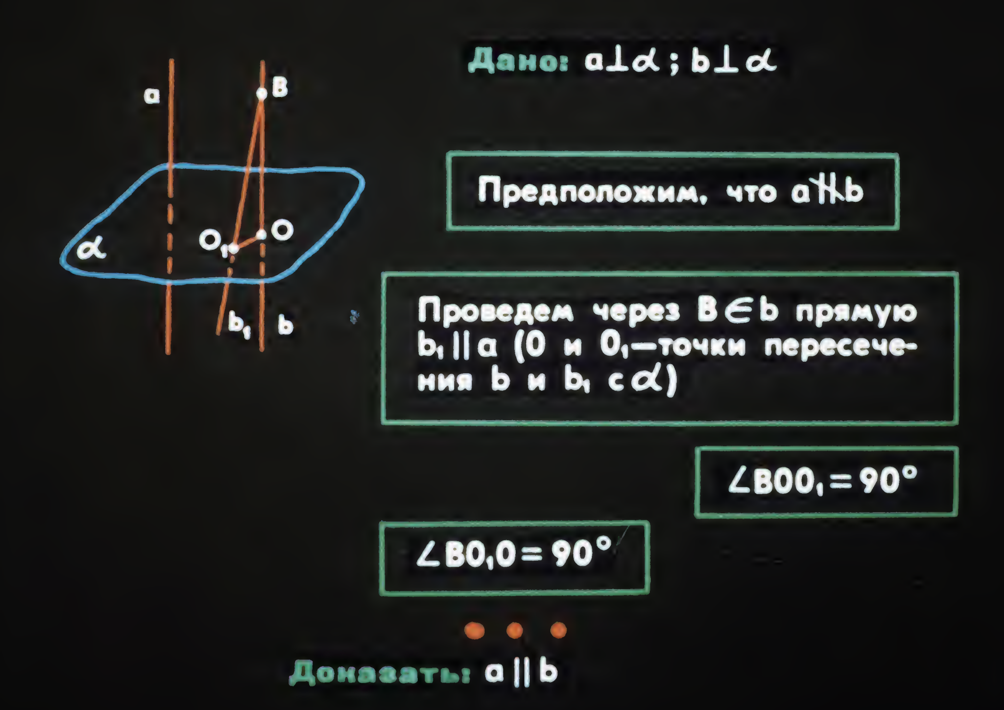
Теорема.

Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости α, то они параллельны.



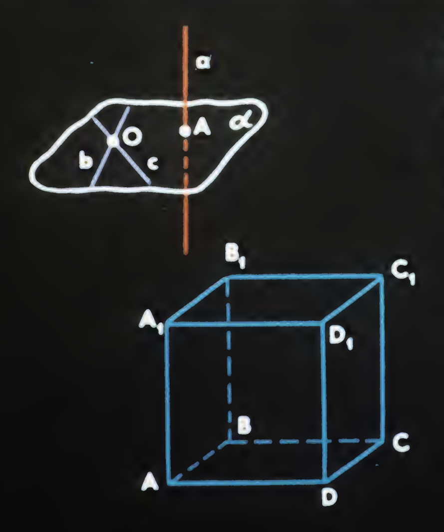
Прямая KB перпендикулярна любой прямой в плоскости β. Прямая OM перпендикулярна любой прямой в плоскости β. Докажите, используя рассматриваемую теорему, что прямые KB и OM параллельны.

Доказательство теоремы.



Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

Если прямая a пересекает плоскость α и перпендикулярна двум пересекающимся прямым в α, то a перпендикулярна α.



Дано: пересекающиеся b и c в α

$a \perp b$; $a \perp c$

. . .   . . .

. . .

Доказать: $a \perp \alpha$

Докажите, что из рассматриваемой теоремы следует: ребро AB куба перпендикулярно плоскости его передней грани.

Доказательство теоремы. (Случай, когда a проходит через точку пересечения b и c.)

Дано: a пересекает α в A; b и c лежат в α и проходят через A; $a \perp b$; $a \perp c$

Проведем в α через A прямую x

Отложим на a $AA_1 = AA_2$

Проведем в α BC, пересекающую прямые b, c, x

$A_1B = A_2B$

$A_1C = A_2C$

$\Delta A_1BC = \Delta A_2BC$

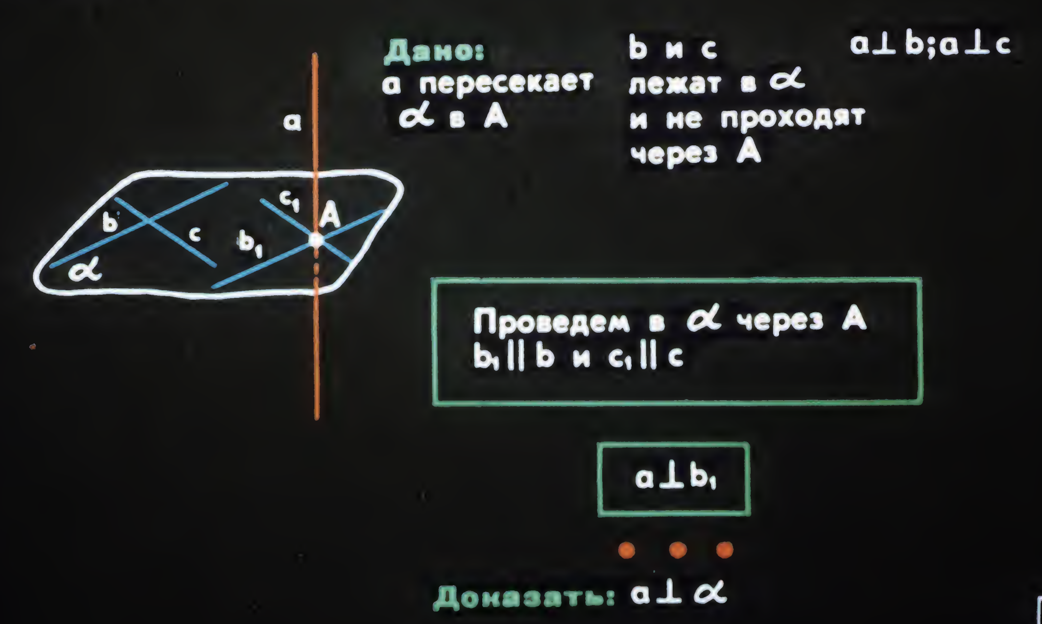
• • •

$\angle A_1AX = 90°$

$a \perp x$

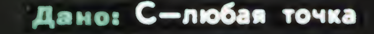
Доказать: $a \perp \alpha$

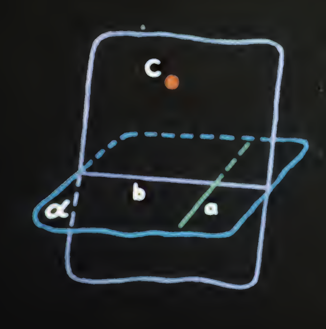
Доказательство теоремы. (Случай, когда a не проходит через точку пересечения b и c.)



Теорема.

Если С—любая точка пространства, α — данная плоскость, то
1) существует прямая с, которая проходит через С и перпендикулярна α;
2) С—единственная.





Проведем в α любую прямую а

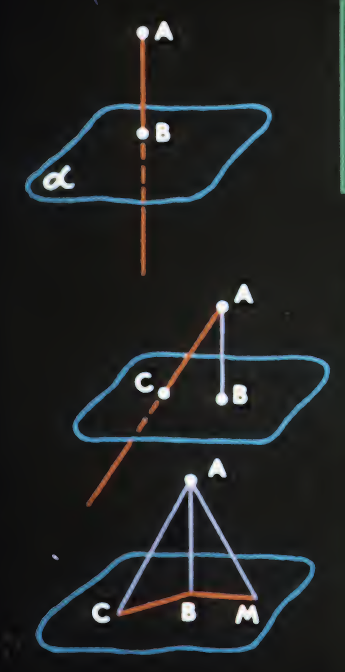
Проведем через С плоскость $\beta \perp a$

В β проведем через С прямую с, перпендикулярную линии пересечения плоскостей α и β

• • •

Доказать: существует такая прямая с, что $C \in c$ и $c \perp \alpha$.

Докажите единственность прямой с.



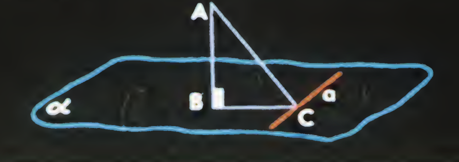
AB—**перпендикуляр** из точки A к плоскости α, если 1) $AB \perp \alpha$ и 2) $B \in \alpha$.
Длина AB—**расстояние** от A до α.

AC—**наклонная** из точки A к плоскости α, если AC не перпендикуляр к α и $C \in \alpha$.

AB—перпендикуляр к α.
AC и AM—наклонные.
BC—**проекция** наклонной AC на плоскость α.

Назовите проекцию наклонной AM на плоскость α.

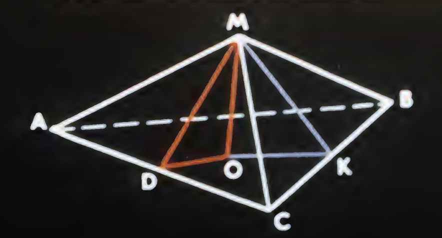
Теорема о трех перпендикулярах.



Рассмотрим перпендикуляр AB и наклонную AC к плоскости α; прямую a, лежащую в α.

1. Если a перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной.

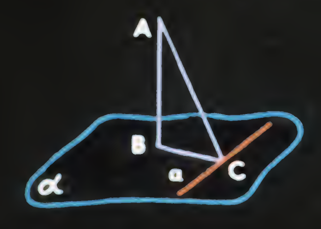
2. Если a перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна проекции наклонной.



MO — перпендикуляр к плоскости α треугольника ABC; MK ⊥ BC; OD ⊥ AC. Сформулируйте ту часть теоремы, из которой следует, что: 1) OK ⊥ BC; 2) MD ⊥ AC.

Доказательство теоремы

о трех перпендикулярах.



AB—перпендикуляр к α;
AC—наклонная к α;
a—прямая в α.

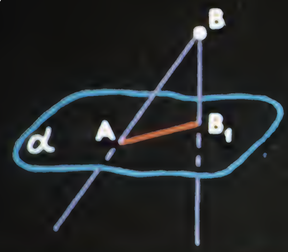
Доказем вначале:
если a ⊥ BC, то a ⊥ AC.

a ⊥ BC

a ⊥ AB

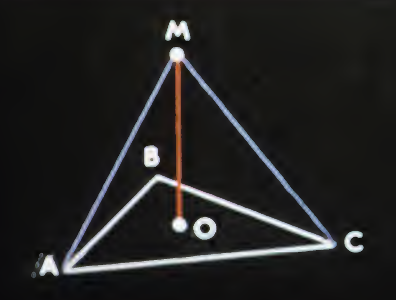
a ⊥ AC

Докажите, используя тот же чертеж, обратную теорему: если a ⊥ AC, то a ⊥ BC.

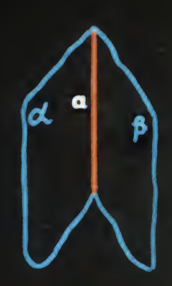


Если $B \notin \alpha$ и BB_1 — перпендикуляр к плоскости α, то B_1 — проекция B на α. Если $A \in \alpha$, то A проекция A на α. AB_1 — проекция прямой AB на α.

Если прямая $\underset{\sim}{a}$ пересекает плоскость α и не перпендикулярна α, то угол между $\underset{\sim}{a}$ и α — это угол, образованный $\underset{\sim}{a}$ и ее проекцией на α. Если $a \perp \alpha$, то угол между a и α равен 90°.



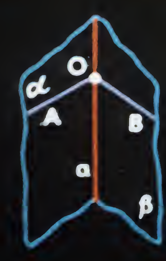
α — плоскость треугольника ABC;
$MO \perp \alpha$.
Что такое угол:
1) между MC и α;
2) между MO и α;
3) между MA и α?



Если α и β полуплоскости, не принадлежащие одной плоскости и имеющие общую границу a, то фигура, образованная прямой a и полуплоскостями α и β, называется **двугранным углом.** a — **ребро** двугранного угла; α и β—его **грани.**

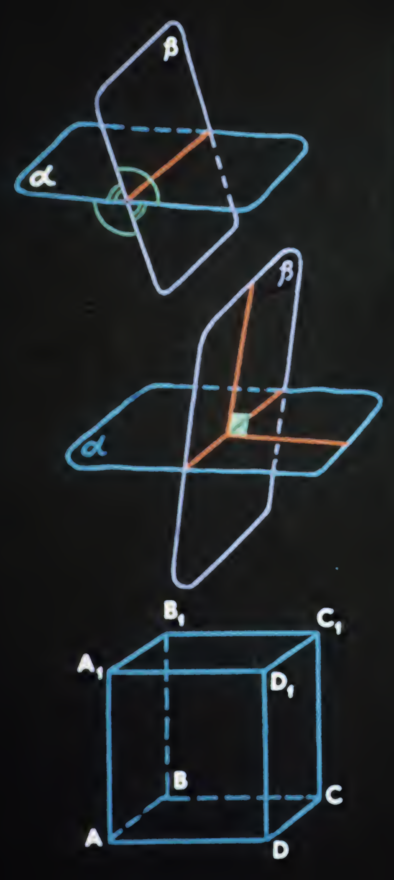


Если провести плоскость γ ⊥ a, то пересечение γ с двугранным углом называется **линейным углом двугранного угла.** **Градусной мерой** двугранного угла называется градусная мера любого из его линейных углов.



a—ребро двугранного угла; O∈a; OA лежит в α; OB лежит в β. OA⊥a, OB⊥a.

Докажите: ∠AOB—линейный угол двугранного угла.



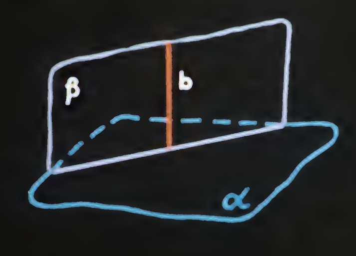
Если один из четырех двугранных углов, образовавшихся при пересечении плоскостей α и β, не больше любого из трех остальных, то это — **угол между α и β.**

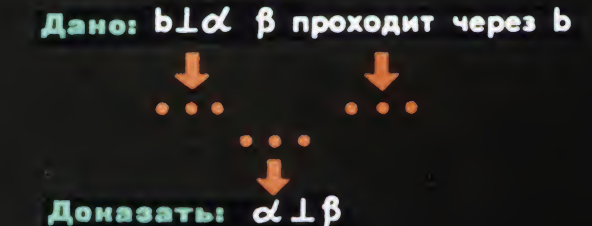
Плоскости α и β называются **перпендикулярными**, если угол между α и β равен $90°$.

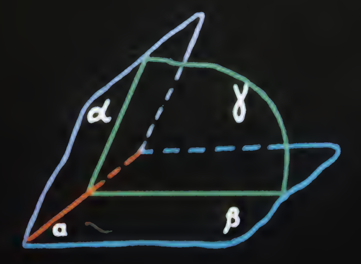
Докажите, что плоскости верхней и задней граней куба перпендикулярны.

Теорема.

Если плоскость β проходит через прямую b, перпендикулярную к плоскости α, то β перпендикулярна α.

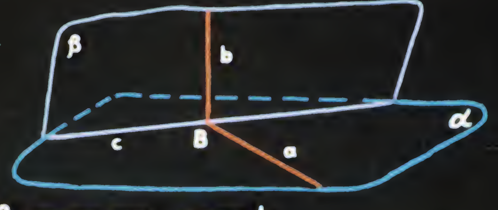






Докажите, что если γ⊥a, то из теоремы следует: γ⊥α, γ⊥β.

Доказательство теоремы.



Дано: $b \perp \alpha$, β проходит через b

b перпендикулярна любой прямой в α

α и β пересекаются по прямой c

$b \perp c$

Проведем в α через точку пересечения b и α прямую $a \perp c$

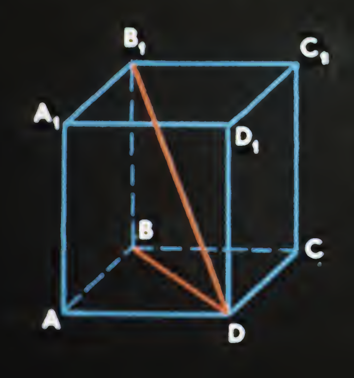
Через a и b проходит плоскость γ

...

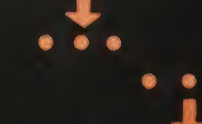
Доказать: $\alpha \perp \beta$

Теорема.

Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, то квадрат диагонали равен сумме квадратов всех измерений.



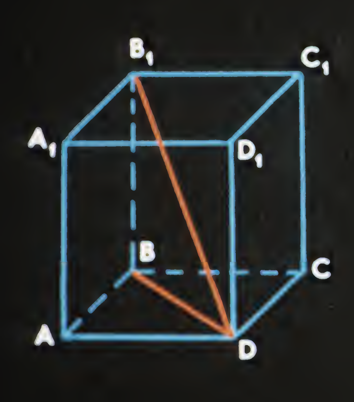
Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед



Доказать: $B_1D^2 = BA^2 + BC^2 + BB_1^2$

Используя теорему, найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AB = 4$ дм, $BC = 6$ дм, $BB_1 = 10$ дм.

Доказательство теоремы.



Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед

$\angle BAD = 90°$

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

BB_1 — перпендикуляр к плоскости ABC

$\angle B_1BD = 90°$

• • •

Доказать: $B_1D^2 = BA^2 + BC^2 + BB_1^2$

КОНЕЦ

Диафильм создан
по програме средней
общеобразовательной школы

Автор доктор
педагогических наук
М. ВОЛОВИЧ
Художник-оформитель В. ЕРМОЛАЕВА
Редактор И. Кремень

Д-015-92

101000, Москва, Старосадский пер., 7
Цветной